ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ

1. Ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις έχουν ακέραιες λύσεις;
   (i) $4x+6y=5$ (ii) $4x-6y=2$
   (iii) $3x+5y=\kappa$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ (iv) $\kappa x+(\kappa+1)y=\lambda$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{Z}$
   (v) $2\kappa x+4y=2\lambda+1$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{Z}$.

2. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις των εξισώσεων
   (i) $2x+3y=5$, (ii) $6x-4y=8$ (iii) $7x-5y=19$, (iv) $5x-3y=7$.

3. Να βρείτε τις θετικές ακέραιες λύσεις των εξισώσεων
   (i) $111x+78y=300$, (ii) $47x-31y=78$.

4. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν θετικές ακέραιες λύσεις:
   (i) $3x+5y=-15$, (ii) $111x+78y=50$, (iii) $5x+7y=5$.

5. Με ποιους τρόπους μπορούμε να αλλάξουμε ένα χαρτονόμισμα των 100 ευρώ με χαρτονομίσματα των 10 και 5 ευρώ;

Β΄ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ

1. Ένας καταστηματάρχης παραγγέλνει 19 μεγάλα και 3 μικρά πακέτα συσκευασίας με σαπούνια του ίδιου τύπου. Όταν όμως πήρε την παραγγελία, είδε έκπληκτος ότι η συσκευασία είχε καταστραφεί και τα σαπούνια ήταν σκόρπια στο κοντέινερ. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να τα τακτοποιήσει με τον τρόπο που ήταν αρχικά συσκευασμένα, αν ξέρετε ότι το πλήθος των σαπουνιών είναι 224;

2. Να βρείτε για ποιές τιμές του x οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
$$f(x)=\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{και} \quad g(x)=\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$
   τέμνονται πάνω στον άξονα $x'x$.

3. Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία, με ακέραιες συντεταγμένες, της ευθείας με εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$, όταν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}$ με $(\alpha,\beta)|\gamma$.

4. Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^*$ με $(\alpha,\beta)=1$. Να αποδείξετε ότι
   (i) Η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\alpha\beta$ δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις.
   (ii) Η εξίσωση $\alpha x+\beta y=2\alpha\beta$ έχει μία μόνο θετική ακέραια λύση.

5. Να βρείτε τα θετικά κλάσματα με παρονομαστές 7 και 13 και με άθροισμα $\frac{33}{91}$.

6 . Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση : $6x+4y+8z=2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ: (ΛΥΣΕΙΣ)

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1) (i) Η εξίσωση $4x+6y=5$, δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{Z}$, διότι ο ΜΚΔ $(4,6)\nmid 5$.

(ii) Η εξίσωση $4x-6y=2$, έχει λύσεις στο $\mathbb{Z}$, διότι ο ΜΚΔ $(4,-6)=(4,6)=2\mid 2$

(iii) Η εξίσωση $3x+5y=k,\ k\in\mathbb{Z}$, ~~δεν~~ έχει λύσεις στο $\mathbb{Z}$, διότι ο ΜΚΔ $(3,5)=1$ (διότι το 3 και 5 πρώτοι μεταξύ τους)
Άρα, προφανώς $(3,5)=1\mid k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$

(iv) Η εξίσωση $kx+(k+1)y=\lambda,\ k,\lambda\in\mathbb{Z}$ έχει λύσεις στο $\mathbb{Z}$ διότι ο ΜΚΔ $(k,k+1)=1$ (έχει αποδειχτεί νωρίτερα)
Άρα, $(k,k+1)=1\mid\lambda,\ \forall\lambda\in\mathbb{Z}$

(v) Η εξίσωση $2kx+4y=2\lambda+1,\ k,\lambda\in\mathbb{Z}$ δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{Z}$ διότι ο αριθμός $(2kx+4y)$ $\forall x,y\in\mathbb{Z}$ και $k\in\mathbb{Z}$ είναι άρτιος ενώ παράλληλα ο αριθμός $(2\lambda+1)$, $\forall\lambda\in\mathbb{Z}$ είναι περιττός

2) (i) $2x+3y=5$, Προφανής λύση η $(x_0,y_0)=(1,1)$
τότε όλες οι υπόλοιπες λύσεις δίνονται από τους τύπους:
$$x=x_0+\frac{\beta}{(\alpha,\beta)}t=1+\frac{3}{1}t=1+3t$$
και
$$y=y_0-\frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}t=1-\frac{2}{1}t=1-2t,\quad t\in\mathbb{Z}$$

(ii) $6x-4y=8 \rightsquigarrow 3x-2y=4$, Προφανής λύση η $(x_0,y_0)=(2,1)$
τότε όλες οι υπόλοιπες λύσεις δίνονται από τους τύπους
$$x=x_0+\frac{\beta}{(\alpha,\beta)}t=2+(-2)t=2-2t$$
και
$$y=y_0-\frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}t=1-3t,\quad t\in\mathbb{Z}$$

(iii). $7x - 5y = 19$, Προφανής λύση η $(x_0, y_0) = (2, -1)$

Άρα, όλες οι υπόλοιπες λύσεις δίνονται από τους τύπους

$$x = x_0 + \frac{\beta}{(\alpha,\beta)} t = 2 + (-5)t = 2 - 5t$$

και

$$y = y_0 - \frac{\alpha}{(\alpha,\beta)} t = -1 - 7t \ , \ t \in \mathbb{Z}$$

(iv). $5x - 3y = 7$, Προφανής λύση η $(x_0, y_0) = (2, 1)$

Άρα, όλες οι υπόλοιπες λύσεις δίνονται από τους τύπους

$$\left.\begin{aligned} &x = 2 - 3t \\ &\text{και} \\ &y = 1 - 5t \end{aligned}\right| \ t \in \mathbb{Z}$$

Παρατήρηση: όλες οι υπόλοιπες λύσεις θα είναι πάντα ακέραιες

3)(i) Έχουμε: $111x + 78y = 300 \Leftrightarrow 3 \cdot (37x + 26y) = 3 \cdot 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 37x + 26y = 100 \rightsquigarrow (\text{ΜΚΔ}(37, 26) = 1)$

Προφανής ρίζα η $(x_0, y_0) = (2, 1)$. Άρα οι λύσεις θα δίνονται:

$x = 2 + 26t$ και $y = 1 - 37t$, $\forall t \in \mathbb{Z}$

Αλλά, θα πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 26t > 0 \\ 1 - 37t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{13} < t < \frac{1}{37} \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow t = 0$

Άρα, η προφανής λύση είναι και μοναδική

(ii) Έχουμε: $47x - 31y = 78 \rightsquigarrow \text{ΜΚΔ}(74, -31) = 1$

Προφανής ρίζα η $(x_0, y_0) = (1, -1)$. Άρα, οι λύσεις θα δίνονται:

$x = 1 + 3t$ και $y = -1 + 47t$, $t \in \mathbb{Z}$

Αλλά, θα πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -\frac{1}{31} \\ t > \frac{1}{47} \end{cases} \Leftrightarrow t \in \mathbb{N}^*$

Επομένως, θα έχει ακέραιες λύσεις (θετικές) τις:

$x = 1 + 3t$ & $y = -1 + 47t$, $\underline{\forall t \in \mathbb{N}^*}$

4) (i) $3x+5y=-15$ (ϵ_1)

Προφανώς, και η εξίσωση (ϵ_1) <u>δεν</u> έχει θετικές ακέραιες ρίζες x, y διότι $3x+5y>0$ $\forall x,y \in \mathbb{N}^*$ ενώ συγχρόνως $-15<0$. (Προσοχή το $\mathbb{N}^*$ είναι οι θετικοί ακέραιοι)

(ii) $111x+78y=50$ (ϵ_2)

Η εξίσωση (ϵ_2) <u>δεν</u> έχει θετικές ακέραιες ρίζες x, y διότι $\forall x,y \in \mathbb{N}^*$ ($\mathbb{N}^*$: θετικοί ακέραιοι)

$111x+78y \geq 111 \cdot 1 + 78 \cdot 1 = 189 > 50$. (το 1 κ. φράγμα του συνόλου $\mathbb{N}^*$)

(iii) $5x+7y=5$ (ϵ_3)

Η εξίσωση (ϵ_3) <u>δεν</u> έχει θετικές ακέραιες ρίζες x, y διότι $\forall x,y \in \mathbb{N}^*$:

$5x+7y \geq 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 12 > 5$ (το 1 κφ. του $\mathbb{N}^*$)

5). Έχουμε να λύσουμε την εξίσωση:

$10x+5y=100 \iff 2x+y=20$ (ϵ_0) $x \geq 0$ & $y \geq 0$.

Έχουμε, τον ΜΚΔ $(2,1)=1$

Αναζητούμε τις <u>μη</u> αρνητικές λύσεις της εξίσωσης (ϵ_0)

Προφανής ρίζα η $(x_0, y_0) = (0, 20)$ όπου $y \geq 0$ και $x \geq 0$

Άρα, οι υπόλοιπες δίνονται από τις σχέσεις

$x=0+t$ και $y=20-2t$, $t \in \mathbb{Z}$

Έτσι, έχουμε

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t \geq 0 \\ 20-2t \geq 0 \end{cases} \iff 0 \leq t \leq 10 \iff t = 0, 1, \ldots, 10$$

Επομένως, οι <u>μη</u> αρνητικές λύσεις της εξίσωσης (ϵ_0) είναι οι $(0,20)$, $(1,18)$, $(2,16)$, $(3,14)$, $(4,12)$, $(5,10)$, $(6,8)$, $(7,6)$, $(8,4)$, $(9,2)$, $(10,0)$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1) Έστω x σαπούνια από τα μεγάλα πακέτα
Έστω y σαπούνια από τα μικρά πακέτα
Τότε προκύπτει η διοφαντική εξίσωση

$19x+3y=224 \quad , \forall x>y>0 \quad (E_0)$

Αναζητούμε τις θετικές λύσεις της (E_0) οι οποίες προφανώς είναι ακέραιες. Παρατηρούμε, ότι $(19,3)=1$

Τουτέστιν, από το Θ. Bezout και τον Ευκλείδειο αλγόριθμο έχουμε, ότι:

$19=3\cdot 6+1 \Rightarrow 1=19-3\cdot 6 \Rightarrow 1=1\cdot 19+(-6)\cdot 3 \quad (1)$

Πολ/ζω την (1) με 224, και έτσι προκύπτει:

$224=224\cdot 19+(-1344)\cdot 3$

Επομένως, μια προφανής λύση είναι η:

$(x_0,y_0)=(224,-1344)$

Και έτσι το πλήθος των ακέραιων λύσεων δίνεται από:

$x=224+3t$ και $y=-1344-19t$, $\forall t\in\mathbb{Z}$

Ενώ, περιορίζοντας τα x, y, παίρνουμε:

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 224+3t>0 \\ -1344-19t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>-\frac{224}{3} \\ t<-\frac{1344}{19} \end{cases} \Leftrightarrow -74{,}6<t<-70{,}73$$

$\Leftrightarrow t=-71$ ή $t=-72$ ή $t=-73$ ή $t=-74$

Άρα, τα ζεύγη των x, y δίνονται από τον πίνακα

x	11	8	5	2
y	5	24	43	62

Και επειδή $x>y>0$, μοναδική λύση $(x,y)=(11,5)$

2) Αφού, G_f και G_g τέμνονται πάνω στον άξονα x τότε, προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ημ\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0 \\ συν\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{3}=k\pi, \ k\in\mathbb{Z} \\ x-\frac{\pi}{6}=\lambda\pi+\frac{\pi}{2}, \ \lambda\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=k\pi-\frac{\pi}{3}, \ k\in\mathbb{Z} \\ x=\lambda\pi+\frac{2\pi}{3}, \ \lambda\in\mathbb{Z} \end{cases} \Bigg| \overset{(1)}{\Leftrightarrow} k\pi-\frac{\pi}{3}=\lambda\pi+\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow k\pi-\lambda\pi=\pi \Leftrightarrow k-\lambda=1. \ (E_0)$$

Μια προφανής διοφαντική εξίσωση (E_0)

Προφανής λύση η $(x_0,y_0)=(2,1)$

Άρα, οι ακέραιες λύσεις της (E_0) θα δίνονται από:

$k=2+t$ και $\lambda=1+t$, $t\in\mathbb{Z}$

Συνεπώς, στην (1) έχουμε, τις ζητούμενες τιμές του x:

$$x=\underbrace{(2+t)}_{\rho\in\mathbb{Z}}\pi-\frac{\pi}{3}=\rho\pi-\frac{\pi}{3}, \ \rho\in\mathbb{Z}$$

3) Αρχικά, θεωρούμε $\delta=(\alpha,\beta)$

Αφού, $\delta|\gamma \leadsto$ Η εξίσωση έχει ακέραιες ρίζες

Αν (x_0,y_0) μια τυχαία τότε, οι υπόλοιπες ακέραιες λύσεις δίνονται από τους τύπους:

$$x=x_0+\frac{\beta}{\delta}t \quad \text{και} \quad y=y_0-\frac{\alpha}{\delta}t$$

Έστω σημεία (x_1,y_1) & (x_2,y_2) με ακέραιες συντεταγμένες και μάλιστα ρίζες της εξίσωσης

$\alpha x+\beta y+\gamma=0$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}$.

Συνεπώς,

$$x_1=x_0+\frac{\beta}{\delta}t_1 \qquad x_2=x_0+\frac{\beta}{\delta}t_2$$

και $\qquad$ ενώ, και $\qquad$, $\forall t_1,t_2\in\mathbb{Z}$

$$y_1=y_0-\frac{\alpha}{\delta}t_1 \qquad y_2=y_0-\frac{\alpha}{\delta}t_2$$

Γνωστό, σε εμάς ότι η απόσταση των $A(x_1,y_1)$ & $B(x_2,y_2)$ είναι:

$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$

$$= \sqrt{\frac{\beta^2}{\delta^2}(t_2-t_1)^2 + \frac{a^2}{\delta^2}(t_2-t_1)^2} = |t_2-t_1|\cdot \frac{\sqrt{a^2+\beta^2}}{\delta}$$

Άρα, η απόσταση (ΑΒ) ελαχιστοποιείται όταν ελαχιστοποιείται η παράσταση $|t_2-t_1|$.
Αυτό θα συμβεί όταν $|t_2-t_1|=1$, επομένως
$(AB)_{min} = \frac{\sqrt{a^2+\beta^2}}{\delta}$

4) i. Η εξίσωση $ax+\beta y = a\cdot\beta$, $a,\beta\in\mathbb{N}^*$ έχει ακέραιες ρίζες επειδή $(a,\beta)=1$

Μια προφανής ρίζα είναι η $(x_0,y_0)=(\beta,0)$

Άρα, όλες οι λύσεις (ακέραιες) δίνονται από τους τύπους
$x=\beta+\beta t$ & $y=-at$, $\forall t\in\mathbb{Z}$

Έστω ότι έχει θετικές ακέραιες ρίζες

δηλ. $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta+\beta t>0 \\ -at>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>-1 \\ t<0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<t<0$

Αλλά $t\in\mathbb{Z}$. Άτοπο. Άρα, δεν έχει θετικές ακέρ. ρίζες

ii. Ομοίως (με προφανή ρίζα την $(x_0,y_0)=(\beta,a)$)

5) $\forall x,y \in \mathbb{N}^*$: $\frac{x}{7}+\frac{y}{13}=\frac{33}{91} \Leftrightarrow 13x+7y=33$

Προκύπτει για διοφαντική εξίσωση

- α' τρόπος: Μέσω προφανής ρίζας την $(-33,66)$
- β' τρόπος: Αν δεν φαίνεται αμέσως, τότε:

$13 = 1\cdot 7+6$ και $7 = 1\cdot 6 + \boxed{1} \leftarrow$ ΜΚΔ των $(13,7)$

Τότε $1 = 7-6 = 7-(13-7) = (-1)\cdot 13+2\cdot 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 33 = (-33)\cdot 13 + 66\cdot 7 \rightsquigarrow (x_0,y_0)=(-33,66)$

Άρα, $x=-33+7t$ & $y=66-13t$, $t\in\mathbb{Z}$

Έτσι, περιορίζοντας τα x,y:

$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -33+7t>0 \\ 66-13t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{33}{7}<t<\frac{66}{13} \Leftrightarrow t=5$

Άρα, το ζεύγος $(x,y)=(2,1)$ και τα κλάσματα είναι τα $\frac{2}{7}$ και $\frac{1}{13}$

6) $6x+4y+8z=2 \Leftrightarrow 3x+2y+4z=1$ ($\leadsto (3,2,4)=1$)

Θέτω $3x+2y=w$

Άρα, έχουμε μια νέα εξίσωση:

$w+4z=1$ ώστε $(1,4)=1$. Άρα επιδέχεται λύση

Μια προφανής λύση είναι η $(x_0,y_0)=(5,-1)$

Επομένως, οι γενική λύση θα είναι

$$w = x_0 + \frac{\beta}{(\alpha,\beta)}t = 5+4t$$

και

$$z = y_0 - \frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}t = -1-t$$

Αλλά, θεωρούσαμε ότι

$w=3x+2y \leadsto 1\cdot w=3x+2y$

Ενώ $3x+2y=1$ διότι $(3,2)=1$ (βάση του Bezout)

με προφανή λύση την $(1,-1)$

Τουτέστιν,

$$\left.\begin{aligned} x &= 1\cdot w = 5+4t \\ y &= -1\cdot w = -5-4t \\ z &= -1-t \end{aligned}\right|\ t\in\mathbb{Z}$$